Test d'entrée 2019. ECE. Mathématiques. Durée 1h30

Nom :____

Prénom :____

Email :____

Lycée de provenance :________________________________

Classe de provenance et spécialité (par exemple : T ES spé math) :____________________

Sauf précision du contraire, les réponses doivent être justifiées.
Une réponse correcte sans justification ne rapportera pas de point. En revanche, une réponse dont la justification est claire et bien rédigée rapportera des points même si le résultat final est faux (à cause d'une erreur de calcul par exemple).

L'utilisation de la calculatrice n'est pas autorisée.
Votre copie doit être rédigée **en français** uniquement.

Exercice 1. ① Calculer :

(a) $\frac{1}{12} - \frac{1}{8}$
(b) $2^3 4^{-2}$

② Résoudre l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$\sqrt{x+2} = x.$$

③ Résoudre l'inéquation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$\mathrm{e}^{2x} - 2\mathrm{e}^{x} - 2 < 0.$$

④ Déterminer la limite :

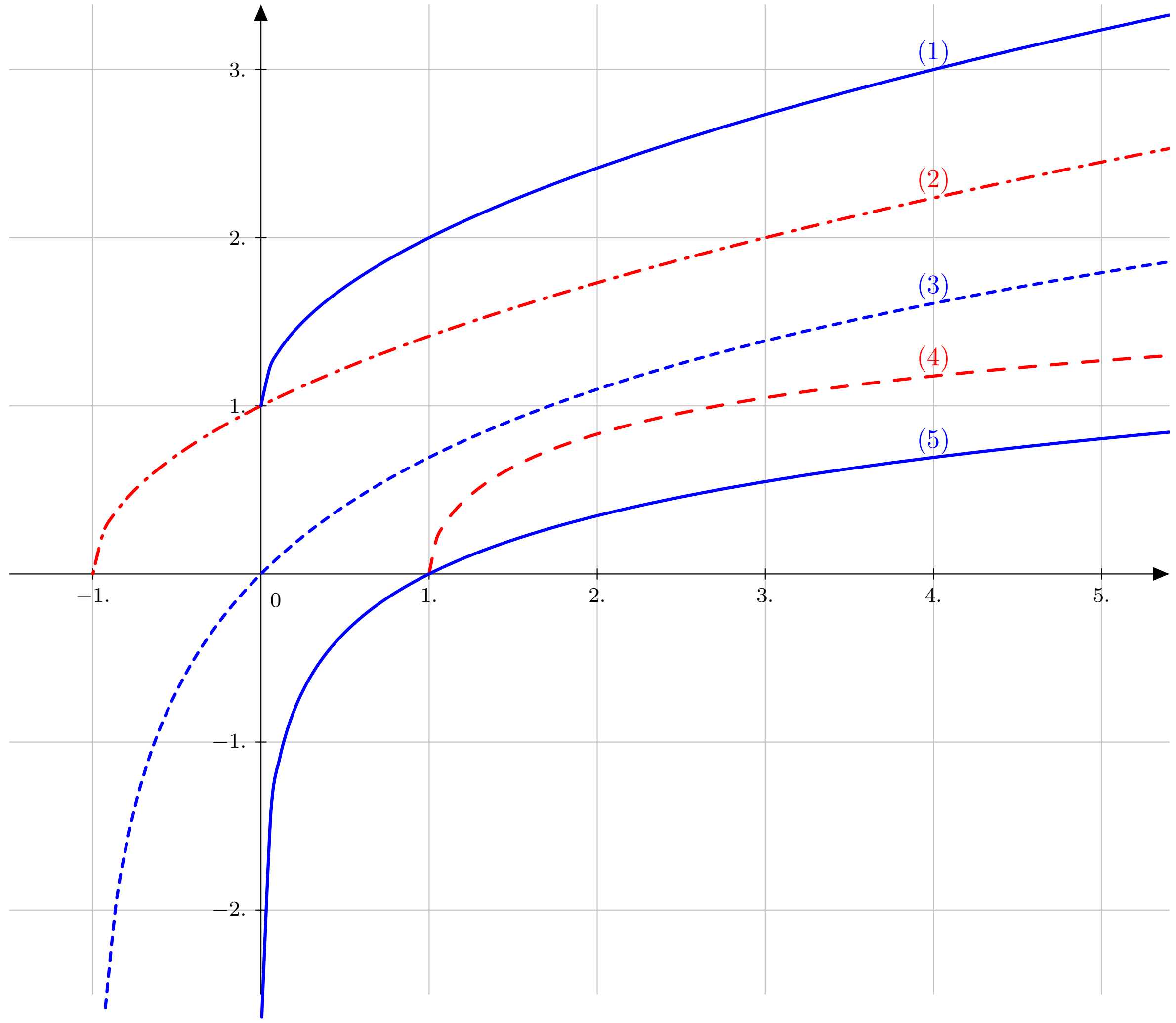
$$\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x^2 + x + 2019} - x.$$

⑤ Les cinq fonctions f, g, h, i, j définies par :

$$f(x) = \ln(x+1) \qquad g(x) = \sqrt{\ln(x)} \qquad h(x) = \ln(\sqrt{x}) \qquad i(x) = \sqrt{x+1} \qquad j(x) = \sqrt{x} + 1$$

ont été représentées page suivante.
Identifier chaque courbe (de (1) à (5)) à chaque fonction (de f à j).

Aucune justification n'est demandée ici, vous présenterez simplement la réponse sous la forme « (1)=f, (2)=g, (3)=h, etc. » (ce n'est pas la bonne réponse !).



Exercice 2. ① Pour chacune des phrases suivantes, préciser si elle est vraie ou fausse. Lorsqu'elle est vraie, aucune justification n'est demandée ; lorsqu'elle est fausse, la rectifier.

(a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sqrt{x^2} = x$

(b) pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\ln\left(\sqrt{x}\right) = \dfrac{1}{2}\ln(x)$

(c) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 \leqslant x^3$

(d) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, si $x^2 = 2$ alors $x = \sqrt{2}$

② Déterminer les raisonnements qui sont logiquement valides (on ne justifiera pas la réponse). Vous écrirez "oui" si le raisonnement est logiquement valide, "non" sinon.

(a) Tous les candidats sont bons en mathématiques. Amine est bon en mathématiques. Donc Amine est un candidat.

(b) Amine est un candidat. Or tous les candidats sont bons en mathématiques. Donc Amine est bon en mathématiques.

(c) Aucun candidat n'est bon en mathématiques. Or Amine n'est pas bon en mathématiques. Donc Amine est un candidat.

(d) Aucun candidat n'est bon en mathématiques. Or Amine est un candidat. Donc il n'est pas bon en mathématiques.

(e) La plupart des candidats s'appellent Amine. Or tous les Amine sont bons en mathématiques. Donc certains candidats sont bons en mathématiques.

(f) Tous les candidats s'appellent Amine. Or certains Amine sont bons en mathématiques. Donc certains candidats sont bons en mathématiques.

Exercice 3.
Problème.

On considère la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par

$$f(x)=\frac{\mathrm{e}^x-1}{x\mathrm{e}^x+1}$$

On désigne par $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

Partie A - Étude d'une fonction auxiliaire.

Soit la fonction g définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par

$$g(x)=x+2-\mathrm{e}^x.$$

① Étudier le sens de variation de g sur $[0;+\infty[$ et déterminer la limite de g en $+\infty$.

② (a) Montrer que l'équation $g(x)=0$ admet une solution et une seule dans $[0;+\infty[$.
On note α cette solution.

(b) Vérifier que $1<\alpha<2$. (On donne : $\mathrm{e}\approx 2,7$.)

③ En déduire le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

Partie B - Étude de la fonction f

① (a) Montrer que, pour tout x appartenant à $[0;+\infty[$:

$$f'(x)=\frac{\mathrm{e}^x g(x)}{(x\mathrm{e}^x+1)^2}.$$

(b) En déduire le sens de variation de la fonction f sur $[0;+\infty[$.

② (a) Montrer que pour tout réel positif x :

$$f(x)=\frac{1-\mathrm{e}^{-x}}{x+\mathrm{e}^{-x}}.$$

(b) En déduire la limite de f en $+\infty$. Interpréter graphiquement le résultat trouvé.

③ (a) Établir que $f(\alpha)=\dfrac{1}{\alpha+1}$.

(b) Déduire de la partie A un encadrement de $f(\alpha)$.

④ Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0.

⑤ (a) Établir que, pour tout x appartenant à l'intervalle $[0;+\infty[$,

$$f(x)-x=\frac{(x+1)\,u(x)}{x\mathrm{e}^x+1}\quad \text{avec } u(x)=\mathrm{e}^x-x\mathrm{e}^x-1.$$

(b) Étudier le sens de variation de la fonction u sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$. En déduire le signe de $u(x)$.

(c) Déduire des questions précédentes la position de la courbe $\mathcal{C}$ par rapport à la droite (T).