CHAPITRE IV — LES ENTIERS NATURELS.
Récurrences, Cardinaux, Dénombrements des ensembles

A) L'ENSEMBLE N DES ENTIERS NATURELS

I) APPROCHE CONSTRUCTIVISTE (Théorie des ensembles)

Construction des entiers naturels par la méthode de Von Neumann[1] :

Les entiers naturels sont construits comme des ensembles, à partir des règles suivantes :

1. L'ensemble vide est un entier naturel noté 0.

2. Si n est un entier naturel, l'ensemble nU{n} est aussi un entier naturel, appelé le successeur immédiat de n.

Le successeur immédiat de $0=\varnothing$ est : $0 \cup \{0\} = \varnothing \cup \{0\} = \{0\} \underset{\text{notation}}{=} 1$ $\left(=\left\{\varnothing\right\}\right)$

Celui de 1: $1 \cup \{1\} = \{0\} \cup \{1\} = \{0,1\} \underset{\text{notation}}{=} 2$ $\left(=\left\{\varnothing;\left\{\varnothing\right\}\right\}\right)$

Celui de 2: $2 \cup \{2\} = \{0,1\} \cup \{2\} = \{0,1,2\} \underset{\text{notation}}{=} 3$ $\left(=\left\{\varnothing;\left\{\varnothing\right\};\left\{\varnothing;\left\{\varnothing\right\}\right\}\right\}\right)$

Opérations

L'addition est une réunion, la soustraction revient à retirer des éléments, la multiplication est un produit cartésien.

II) APPROCHE AXIOMATIQUE

Définition axiomatique de Peano[2] :

Il existe un ensemble, nommé « ensemble des entiers naturels », tel que :

1. l'élément appelé zéro et noté: 0, est un entier naturel.
2. Tout entier naturel n a un unique successeur, noté s(n) ou Sn.
3. Aucun entier naturel n'a 0 pour successeur.
4. Deux entiers naturels ayant même successeur sont égaux.
5. Si un ensemble d'entiers naturels contient 0 et contient le successeur de chacun de ses éléments, alors cet ensemble est égal à N. (axiome de récurrence)

Propriétés fondamentales

N est totalement ordonné (pour tout $n,p\in\mathbb{N}$ $n\le p$ ou $p\le n$). Toute partie non vide possède un plus petit élément ; toute partie non vide MAJORÉE possède un plus grand élément.

Régularité de tous les éléments non nuls : si $a,b,c\in\mathbb{N}$, $a\neq 0$ et $ab=ac$, alors $b=c$ (a est régulier pour $\times_{\mathbb{N}}$)

[1] *mathématicien et physicien américain d'origine hongroise, a apporté d'importantes contributions tant en mécanique quantique, qu'en analyse fonctionnelle, en théorie des ensembles, en informatique, en sciences économiques ainsi que dans beaucoup d'autres domaines des mathématiques et de la physique. Il a de plus participé aux programmes militaires américains.*

[2] *Giuseppe Peano (Spinetta di Cuneo, 27 août 1858 - Turin, 20 avril 1932) est un mathématicien italien. D'abord analyste, puis logicien, mais plus intéressé par la formalisation des mathématiques que par la logique elle-même, il finira par consacrer la fin de sa vie à la mise au point et à la promotion du latino sine flexione, un latin à la grammaire très simplifiée, qu'il voyait comme une langue auxiliaire pour les échanges internationaux, en particulier scientifiques.*

Intégrité : Conséquence : $\times_{\mathbb{N}}$ est intègre : si ab=0 alors a=0 ou b=0.

Rq : la multiplication des fonctions, p.ex., n'est pas intègre : on peut avoir $fg\neq 0$ avec $f\neq 0$ et $g\neq 0$

Notation : Pour $n,p\in\mathbb{N}$, n notera $[[n\,;\,p]]=\{x\in\mathbb{N},\ n\leq x\leq p\}$, $[[n\,;\,+\infty[[=\{x\in\mathbb{N},\ n\leq x\}$

B) CARDINAUX

I) CARDINALITÉ (« nombre d'éléments ») D'UN ENSEMBLE : DÉFINITIONS

Déf : cardinal d'un ensemble fini

Soit E un ensemble. Si il existe une bijection de $[[1\,;\,n]]$ vers E alors E est dit de cardinal fini n (ou cardinalité n). Notations : Card(E), ou #E, ou encore $|E|$.

Rq1 : Card(E) est unique : E ne peut être en bijection avec $[[1\,;\,n]]$ et $[[1\,;\,p]]$ si $n\neq p$

Rq2 : Deux ensembles ont même cardinal ssi ils sont en bijection

Rq3: si E n'est pas de cardinal fini on dit que son cardinal est transfini

Rq4 : tous les ensembles infinis ne sont pas en bijection, par exemple E et P(E) ne peuvent pas l'être (exo LEA 83, Cantor 1893) : il y a « plusieurs infinis »

Déf : soient E et F deux ensembles et $f : E\to F$ une application.

S'il existe une bijection $f : E\to F$ on dit que E et F sont équipotents

S'il existe une injection $f : E\to F$ on dit que E est moins puissant que F

S'il existe une surjection $f : E\to F$ on dit que E est plus puissant que F

Dans le cas où E et F sont finis on obtient, respectivement, $|E|=|F|$, $|E|\leq|F|$, $|E|\geq|F|$

II) PROPRIÉTÉS

- Si A et B sont deux parties finies disjointes d'un ensemble E, $|A\cup B|=|A|+|B|$ (vrai pour n ensembles disjoints)
- Crible de Poincaré :

  Si A et B sont deux parties quelconques d'un ensemble E, $|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|$

  Si A, B et C sont trois parties quelconques d'un ensemble E,

  $|A\cup B\cup C|=|A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|A\cap C|-|B\cap C|+|A\cap B\cap C|$
- Si E fini, $|\bar{A}|=|E|-|A|$
- Si $I\subset\mathbb{N}$ (un ensemble fini ou infini d'indices) et $B=\{B_i/i\in I\}$ est une partition de E, alors $|E|=\sum_{i\in I}|B_i|$
- Si $A_1, A_2\ldots A_n$ sont des ensembles $|A_1\times A_2\times\ldots\times A_n|=|A_1|\times|A_2|\times\ldots\times|A_n|$

Ex : E={a ; b ; c} et F={1 ; 2}

- Si $f : E \to F$ est une application alors $|E| = \sum_{y \in F} \left|f^{-1}(y)\right|$

[Démo : $\{f^{-1}(y) / y \in f(E)\}$ constitue une partition de E

Ex : application E=ECS1, f=âge d'un élève

- Lemme des bergers : des bergers comptent les pattes de leurs moutons, ils divisent par 4 pour connaître le nombre de moutons.

Thm : si E et F sont FINIS et $f : E \to F$ est une application SURJECTIVE et tous les $f^{-1}(y)$, avec $y \in F$, sont de même cardinal p, alors $|E| = p|F|$

[démo : cas particulier du précédent]

Ex A : E=ens. des pattes, F=ensemble des moutons, f : une patte $\mapsto$ son mouton…

C) RAPPELS ET COMPLÉMENTS SUR LES COEFFICIENTS BINOMIAUX

1) Déf et premières propriétés : $0! = 1$

$\forall n, p \in \mathbb{N}$ $\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-p+1)}{p!}$, avec la convention $\binom{n}{p} = 0$ si $p > n$.

Ex de calcul : $\binom{17}{5} =$

Prop : $\binom{n}{0} = 1 = \binom{n}{n}$ $\qquad \binom{n}{1} = n = \binom{n}{n-1}$ $\qquad \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2} = \binom{n}{n-2}$

Prop (symétrie) : $\forall n, p \in \mathbb{N}$, $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$ [[Démo :

2) <u>Récurrence et triangle de Pascal</u> :

<u>Prop</u> : $\forall n, p \in \mathbb{N}$, $\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p}$

[[

]]

On en déduit le <u>Triangle de Pascal</u> :

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

…

On en déduit aussi (par récurrence) que $\boxed{\forall n, p \in \mathbb{N}, \binom{n}{p} \in \mathbb{N}}$

4) <u>Application, la formule du binôme de Newton</u> : $\boxed{(a+b)^n = = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k}$

[[Démo par récurrence : DM facultatif…

<u>Ex B :</u> Démontrer les formules supplémentaires suivantes :

a) $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$ (deux démonstrations)

b) $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0$

c) Si $p \geq 1$, $p\binom{n}{p} = n\binom{n-1}{p-1}$

d) Si $p \geq 2$, $p(p-1)\binom{n}{p} = n(n-1)\binom{n-2}{p-2}$

e) Sous réserve d'existence de tous les coefficients binomiaux $\binom{r-s}{q}\binom{r}{s} = \binom{r}{q}\binom{r-q}{s}$

f) Si $p \leq n$ démontrez la formule dite "de Pascal généralisée » $\sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}$, (i en remarquant que $\binom{k}{p} = \binom{k+1}{p+1} - \binom{k}{p+1}$ (à justifier), (ii) par récurrence sur n.

D) DÉNOMBREMENTS

Dénombrer : « compter les éléments » d'un ens. E, càd déterminer N tel que E est en bijection avec [[1 ; N]].

Rq : le but est de faire des probabilités, ce qui conditionne ce que l'on appelle dénombrer. Ex : tirage de 2 boules noires parmi 3, combien de tirages possibles ?

<u>**Rappel 1 :**</u> $|\mathbf{P(E)}|=\mathbf{2}^{|E|}$ (2^N sous-ensembles/parties différentes à prendre dans un ensemble à N éléments)

<u>**Rappel 2 :**</u> $|\mathbf{A}^B|=|\mathbf{A}|^{|B|}$ (a^b applications différentes d'un ensemble à b éléments vers un ensemble à a éléments)

I) P-LISTES ET ARRANGEMENT D'ÉLÉMENTS DE E (E ensemble fini)

1) P-listes

<u>Déf</u> : une p-liste d'éléments de E est une liste ordonnée, éventuellement avec répétition de p éléments de E. (aussi appelées p-uplets)

<u>Ex C</u> : E={a ; b ; c}, ex de 2-listes : … Combien de possibilités ?

<u>Ex D :</u> Combien de mots de 8 lettres, ayant ou non un sens, peut-on écrire ?

<u>Ex E :</u> Un code secret de 4 signes est formé à partir des chiffres de 0 à 9, et des deux lettres A et B. Combien y a-t-il de codes possibles ?

<u>Ex F :</u> On a à choisir successivement parmi n éléments, p fois de suite. Combien y a-t-il de listes possibles ?

<u>Thm</u> : Soit $N=|E|$. Une p-liste est uniquement déterminée par une application $[[1 ; p]] \rightarrow E$. Par conséquent, le nombre de p listes d'éléments de E est égal à N^p, nombre d'applications de [[1 ; p]] (ou d'un autre ensemble de cardinal p) vers E.

[[Éléments de démonstration :

2) Arrangements

<u>Déf</u> : un arrangement de p éléments de E est une p-liste dont les éléments sont tous distincts (« sans répétition »).

<u>Ex G</u> : E={a ; b ; c}, ex d'arrangements de 2 éléments : … Combien de possibilités ?

<u>Ex H :</u> On dispose de 12 lettres de scrabble. Combien de mots de 6 lettres, ayant ou non un sens, peut-on écrire ?

Ex I : On veut constituer un arrangement de 10 cartes extraites d'un jeu de 32 cartes. Combien de séries différentes peut-on composer ?

Ex J : Combien d'arrangements sans répétition de p éléments peut-on constituer, à partir d'un ensemble à n éléments ?

Thm : un arrangement de p éléments de E est uniquement déterminé par une application injective [[1 ; p]] $\to$ E.

Le nombre de p-arrangements est égal à $\dfrac{N!}{(N-p)!}$, c'est aussi le nombre d'applications injectives de [[1 ;p]] (ou d'un autre ensemble de cardinal p) vers E.

Cas des permutations : arrangements de N éléments parmi N :

Ex K : On dispose des lettres de Scrabble A,B,C,D,E,F,G,H. Combien de mots de huit lettres, ayant ou non un sens, peut-on écrire ?

Ex L : On réordonne un jeu de 32 cartes. Combien d'ordres possibles peut-on obtenir ?

Ex M : Combien peut-on faire d'arrangements des éléments d'un ensemble de n objets ?

Déf/Thm : Un arrangement de tous les N éléments de E s'appelle une permutation et est uniquement déterminé par une application bijective [[1 ; N]] $\to$ E.

Le nombre de permutations est égal à N!, c'est aussi le nombre de bijections entre [[1 ;N]] (ou un autre ensemble de cardinal N) et E.

II) DÉNOMBREMENT DES PARTIES (OU COMBINAISONS) D'UN ENSEMBLE

Ex N : On doit former un groupe de 4 élèves pris dans une classe de 28. Combien y a-t-il de possibilités ?

Ex O : Dans un jeu de 32 cartes, combien de « mains » de 5 cartes différentes peut-on avoir ?

<u>*Ex P :*</u> *On prend p objets « en vrac » dans un groupe de n objets différents. Combien y a-t-il de possibilités ?*

<u>Thm</u> : Le nombre de parties, ou « combinaisons sans répétition » de p éléments de E, aveard(E)=n, est le coefficient binomial $\begin{pmatrix} N \\ p \end{pmatrix} = \dfrac{N!}{p!(N-p)!}$.

⟦Éléments de démonstration :

<u>Rq 1</u> : arbre de probabilité correspondant à un schéma de Bernoulli : répétition de N expériences aléatoires à deux issues S/E : pour obtenir exactement p « S » il faut avoir p expériences parmi N dont l'issue est « S », ce qui correspond donc à $\begin{pmatrix} N \\ p \end{pmatrix}$ chemins possibles sur l'arbre.

<u>Rq 2</u> : Nombre de combinaisons avec répétition : HP.

<u>*Ex Q :*</u> *Dans la classe de ECS1 (31 élèves), combien peut-on composer de :*

a) *Groupes différents (tous effectifs confondus)*
b) *Listes ordonnées de 5 élèves dont les DMs de maths seront ramassés dans les 5 semaines à venir (un élève par semaine, répétition possible) ?*
c) *Idem, sans répétition ?*
d) *Groupes de colles (non ordonnés) de 5 élèves ?*

<u>*Ex R :*</u> *Une urne contient 12 boules noires et 8 blanches.*

a) *On tire au hasard 5 boules ensemble. Combien de tirages peut-on obtenir comportant 3 noires et 2 blanches ?*
b) *On tire 5 boules successivement et sans remise, combien de tirages peut-on obtenir comportant 3 noires et 2 blanches ?*
c) *On tire 5 boules successivement et avec remise, combien de tirages peut-on obtenir comportant 3 noires et 2 blanches ?*

<u>*Ex S :*</u> *Une urne contient 10 boules rouges, 8 vertes et 7 bleues.*

a) On tire au hasard 6 boules ensemble. Combien de tirages peut-on obtenir comportant deux boules de chaque couleur ? Comportant au moins une bleue ?

b) On tire 6 boules successivement et sans remise. Combien de tirages peut-on obtenir comportant deux boules de chaque couleur ?

c) On tire 6 boules successivement et avec remise. Combien de tirages peut-on obtenir comportant deux boules de chaque couleur ?

<u>*Ex T :*</u> *Le personnel d'une entreprise comporte n_1 hommes et n_2 femmes. On veut élire un bureau de p représentants parmi ces (n_1+n_2) personnes, avec p≤ n_1 et p≤ n_2. (Ex. tiré de Rondy, ECS1, Ellipses)*

a) Combien de bureaux possibles y-a-t'il ?

b) Combien de bureaux possibles comportent k hommes et p-k femmes ?

c) En déduire la <u>Formule de Vandermonde</u> : $\binom{n_1+n_2}{p}=\sum_{k=0}^{p}\binom{n_1}{k}\binom{n_2}{p-k}$