CHAPITRE IV — LES ENTIERS NATURELS.

Vademecum pratique Sommes et Produits Finis

I) SOMMES SIMPLES ET PRODUITS, FINIS

Dans tout ce qui suit $\mathbb{K}$ est un corps ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$)

Déf : Si $I\subset\mathbb{N}$ est un ensemble d'indices (communément $I=[\![0\,;\,n]\!]$, ou $I=[\![1\,;\,n]\!]$), et $(a_i)_{i\in I}$ une famille finie de scalaires (càd un sous-ensemble fini et indexé —numéroté— de $\mathbb{K}$), $\sum_{i\in I} a_i$ représente la somme de tous les $(a_i)_{i\in I}$.

Convention : si $I=\emptyset$, $\sum_{i\in I} a_i = 0$ (la somme de rien est nulle)

Prop. sommes :

$\forall k\in\mathbb{K}$, $k\sum_{i\in I} a_i = \sum_{i\in I} k a_i$ (distributivité/factorisation)

Si $(a_i)_{i\in I}$ et $(b_i)_{i\in I}$ sont deux familles finies de complexes indexées sur le même ensemble I, $\sum_{i\in I}(a_i+b_i) = \sum_{i\in I} a_i + \sum_{i\in I} b_i$ (additivité)

par conséquent $\forall\alpha,\beta\in\mathbb{K}$, $\sum_{i\in I}(\alpha a_i+\beta b_i) = \alpha\sum_{i\in I} a_i + \beta\sum_{i\in I} b_i$ (linéarité)

Si $I=I_1\cup I_2$ avec $I_1\cap I_2=\emptyset$, $\sum_{i\in I} a_i = \sum_{i\in I_1} a_i + \sum_{i\in I_2} a_i$ (sommation par paquets)

par conséquent, si $I=[\![n\,;\,m]\!]$ et $p\in\,]\!]n\,;\,m[\![$, $\sum_{i=n}^{m} a_i = \sum_{i=n}^{p} a_i + \sum_{i=p+1}^{m} a_i$ (Chasles)

plus généralement on peut sommer les termes d'une somme finie, dans n'importe quel ordre.

Déf produits: Si $I\subset\mathbb{N}$ est un ensemble d'indices et $(a_i)_{i\in I}$ une famille finie de scalaires, $\prod_{i\in I} a_i$ représente le produit de tous les $(a_i)_{i\in I}$.

Convention : si $I=\emptyset$, $\prod_{i\in I} a_i = 1$ (le produit de rien est égal à 1)

Prop. produits :

$$\prod_{i\in I}(a_i\times b_i) = \left(\prod_{i\in I} a_i\right)\times\left(\prod_{i\in I} b_i\right)$$

$\forall k\in\mathbb{K}$, $\prod_{i\in I}(k a_i) = k^{\mathrm{Card}(I)}\prod_{i\in I} a_i$

Si $I=I_1\cup I_2$ avec $I_1\cap I_2=\varnothing$, $\displaystyle\prod_{i\in I} a_i=\left(\prod_{i\in I_1} a_i\right)\times\left(\prod_{i\in I_2} a_i\right)$

par conséquent, si $I=[\![n\,;m]\!]$ et $p\in\,]\!]n\,;m[\![$, $\displaystyle\prod_{i=n}^{m} a_i=\left(\prod_{i=n}^{p} a_i\right)\times\left(\prod_{i=p+1}^{m} a_i\right)$

plus généralement on peut multiplier les facteurs d'un produit fini, dans n'importe quel ordre.

II) SOMMES DOUBLES FINIES

Déf : Il s'agit de sommer des termes $a_{i,j}$ indexés sur un domaine $D\subset\mathbb{N}^2$: $\displaystyle\sum_{(i,j)\in D} a_{ij}$

Le domaine de sommation D peut être décrit de différentes manières.

Ex : $\displaystyle\sum_{(i,j)\in[[1;n]]^2} 2^i3^j=\sum_{i,j\in[[1;n]]} 2^i3^j=\sum_{1\le i,j\le n} 2^i3^j=\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} 2^i3^j\right)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} 2^i3^j$

Prop. communes aux sommes simples et doubles :

$\forall k\in\mathbb{K}$, $\displaystyle k\sum_{(i,j)\in D} a_{ij}=\sum_{(i,j)\in D} ka_{ij}$ $\displaystyle\sum_{(i,j)\in D}(a_{ij}+b_{ij})=\sum_{(i,j)\in D} a_{ij}+\sum_{(i,j)\in D} b_{ij}$

Si $D=D_1\cup D_2$ avec $D_1\cap D_2=\varnothing$, $\displaystyle\sum_{(i,j)\in D} a_{ij}=\sum_{(i,j)\in D_1} a_{ij}+\sum_{(i,j)\in D_2} a_{ij}$

Prop. d'inversion des Σ :

Du fait des différentes descriptions possibles du domaine de sommation, on peut en respectant le domaine, sommer d'abord sur les i ou d'abord sur les j :

Cas d'un domaine de sommation rectangulaire : D $=\{(i,j)\in\mathbb{N}^2 \;/\; i\in[\![1\,;n]\!], j\in[\![1\,;p]\!]\}$

$=\{(i,j)\in[\![1\,;n]\!]\times[\![1\,;p]\!]\}$

Schéma:

$$\sum_{(i,j)\in D} a_{ij}=\sum_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le p}} a_{ij}=\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{p} a_{ij}\right)=\sum_{j=1}^{p}\left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\right)$$

Cas d'un domaine de sommation triangulaire:

—type $D_1=\{ (i,j)\in\mathbb{N}^2 \ / \ i,j\in[\![1 ; n]\!], j\leq i\}=\{ (i,j)\in\mathbb{N}^2 \ / \ 1\leq j\leq i\leq n\}$

Schéma:

$$\sum_{(i,j)\in D_1} a_{ij} = \sum_{1\leq j\leq i\leq n} a_{ij} = \qquad \dots \qquad = \qquad \dots$$

—type $D_2=\{ (i,j)\in\mathbb{N}^2 \ / \ i,j\in[\![1 ; n]\!], j<i\}=\{ (i,j)\in\mathbb{N}^2 \ / \ 1\leq j<i\leq n\}$

Schéma:

$$\sum_{(i,j)\in D_2} a_{ij} = \sum_{1\leq j<i\leq n} a_{ij} = \qquad \dots \qquad = \qquad \dots$$

Rq 1 : Ces domaines de sommation sont les plus fréquents, mais tous les domaines de sommation sont possibles, tels que $\{(i,j)\in [\![1 ; n]\!]\times[\![1 ; p]\!]$ et i pair, j impair$\}$, ou encore $\{(i,j)\in [\![1 ; n]\!]\times[\![1 ; p]\!]$ et $i<2j\}$, etc…

Rq 2 : Si D est un domaine de sommation, $\sum_{D} 1$ =Card(D).

Ex : Calculer les sommes suivantes :

a) $\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}1\right)$

b) $\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{i}1\right)$

Rq 3 : Attention si l'on somme un nombre infini de termes ces propriétés ne sont plus valables telles quelles ! Attendre le cours sur les séries…

III) PRODUIT DE SOMMES : Si $(a_i)_{i\in I}$ et $(b_j)_{i\in J}$ sont des familles de scalaires,

$$\left(\sum_{i\in I}a_i\right)\times\left(\sum_{j\in J}b_j\right)=\sum_{i\in I}\left(\sum_{j\in J}a_ib_j\right)=\sum_{j\in J}\left(\sum_{i\in I}a_ib_j\right)$$